Jaeck
Theorie
d. Sphäre

~~III. 713~~
H Bbg 908

H.V.
H. Bbg. 908

mit Kupfern durch=
schossen

cat.

Theorie

der

Sphäre.

Entworfen

von

Michael Jäck,

Doktor.

HISTORISCHER VEREIN ZU BAMBERG

Bamberg im Oktober 1803.

It is more easily, to follow the erroneous principles of writers, than to undermine the chaos of their opinions, and find out the gold of truth.

NEWTON.

Seinen

Mitschülern

weihet dieses Denkmal

brüderlicher Liebe und Freundschaft

der Verfasser.

Vorrede.

Diese Abhandlung übergebe ich meinen Mitschülern, mit denen ich die Bahn der Philosophie und Mathematik durchlief, als Pfand der Freundschaft und Liebe. Sie ist von mir zum Zeichen bestimmet, das Andenken ehemaliger literärischer Verhältnisse zu erneuern, und die Rückerinnerung an die freundschaftlichen Zirkel, die Wißbegierde und Gleichheit der Denkungsart um uns zog, zu beleben und aufzufrischen.

An dieser Abhandlung fällt mir die Anordnung des Stoffes und die Critik der bisher herrschenden, aber falschen Vorstellungsart vom

Ursprunge geometrischer Körper als Eigenthum zu. Die Materie selbst habe ich aus Jakobs, Wolff, Dalham, Horvath geschöpfet, jedoch auch durch selbstthätige Bearbeitung meinem Geiste assimiliret.

Dieses Produkt ist die erste Geburt meiner Imagination. Die Unvollkommenheit desselben wird durch diese Bemerkung Entschuldigung und bey der öffentlichen Beurtheilung Nachsicht finden.

Recensionen

1.
2. Oberdeutsche allgemein. Literat. Zeitung. Jahrg. 1804. XCIII St.
3.
4. Hallisch. Lit. Z. v. 1807. Num. 13
5. Jenaisch. allg. L. Z. v. 1807. N. 148

Lehre von der Kugel.

Einleitung.

§. 1.

Jede Abhandlung über irgend einen mathematischen Gegenstand zerfällt füglich in zween Abschnitte: oder in den theoretischen, und praktischen Theil. Der theoretische befasset sich blos mit der Erklärung des mathematischen Gegenstandes, mit der Bestimmung seiner charakteristischen Eigenheiten, endlich mit der Darstellung seiner Beziehungen zu andern Objekten seiner Gattung. Der praktische Theil hingegen bestimmt die Art und Weise, die theoretischen Lehrsätze, gewissen technischen Zwecken gemäs, anzuwenden. Ich theile daher auch die Lehre

von der Kugel in den theoretischen und praktischen Theil ab. Der erstere hat die Erklärung der Kugel, und ihre Entstehung als Körper, die Bestimmung ihrer Solidität und Oberfläche im Ganzen so wie nach Theilen und die Angabe ihres Verhältnisses mit andern Körpern zum Vorwurfe. Der praktische Theil wird die möglichen Methoden lehren, bey gegebenen Bedingungen die Solidität und Oberfläche einer Kugel zu finden; eine solche, unbeschadet ihrer Form, nach einem Maaße zu vergrößern, oder zu verkleinern, endlich eine Kugel in jeden andern beliebigen regelmäßigen Körper von gleicher Solidität zu verwandeln. Ich beginne nun mit dem theoretischen Theile.

Theoretischer Theil.

§. 2.

Erklärungen.

Eine **Kugel** ist derjenige geometrische Körper, welcher durch eine krumme Oberfläche begrenzt wird, deren einzelne Punkte von einem inneren gleichweit abstehen. — Derjenige Punkt,

der von den Punkten der Oberfläche gleichweit abstehet, ist der Mittelpunkt (das Centrum) der Kugel. — Den Durchmesser (Diameter) nennt man eine jede durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, die sich mit den beyden Endepunkten in der Oberfläche der Kugel endiget. — Der Halbmesser (Radius) ist jede vom Mittelpunkte der Kugel bis zu ihrer Oberfläche gezogene gerade Linie. — Ein Abschnitt (Segment) heisset der Theil einer von einer Fläche durchschnittenen Kugel. — Ein Kugelausschnitt (Sektor) ist ein Stück der Kugel mit konischen Seitenflächen, das mit der Spitze in den Mittelpunkt, mit der Basis in die Oberfläche der Kugel fällt.

§. 3.

Folgesatz.

Da die Radien einer Kugel das Maaß der Abstände der verschiedenen Punkte ihrer Oberfläche vom Mittelpunkte, jene aber gleichweit von diesem entfernt sind, so gleichen sich alle Radien einer und derselben Kugel, folglich auch die Durchmesser.

§. 4.

Die Entstehung der Kugel.

Die ältern und neuern Mathematiker lassen einstimmig die Kugel durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Diameter, und zwar so, daß dieser Halbkreis in jedem Orte des Raumes sich zurückläßt, entstehen. Demnach bestehet die Kugel entweder aus unendlich vielen und ungleichen Kreisen, oder aus Cylindern von unendlich kleinen Höhen, oder aus unendlich vielen, zwar verschiedenen, aber doch unendlich niedrigen abgehauenen Kegeln, oder endlich aus so vielen Kugelflächen, als der Halbmesser Punkte hat. — Aber diese Ansichten der mancherley Entstehungsarten der Kugel unterliegen einer Menge Schwierigkeiten. Sie sind:

1) Kein geometrischer Körper, als nach dreyen Ausmessungen begrenzter Raum, kann als Aggregat aus Flächen, als nur nach zwoen Ausmessungen begrenzten Räumen, folglich auch nicht aus Flächen vermittels der Bewegung dieser entstanden gedacht werden. Bewegte Flächen dehnen sich blos in größeren Räumen aus, oder ändern lediglich ihre Lage. Durch die Bewegung kömmt keineswegs zur Fläche die

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

6) [illegible]

dritte ihr fehlende Dimension, im Gegentheile wird dieser Mangel mit der wiederhohlten Setzung von Flächen wiederhohlet.

2) Jede Linie, daher auch der Halbmesser einer Kugel, läßt sich ins Unendliche theilen. Wie kann nun die Kugel als Inbegriff eben so vieler Flächen, als der Radius Punkte zählet, vorgestellt werden? Nach dieser Ansicht also ist nie eine Kugel entstanden, sondern im unendlichen Werden begriffen.

3) Der reine Raum, als ein Beharrliches, schließet alle Veränderung, mit dieser alle Bewegung, von sich aus. Zur Entstehung geometrischer Körper, als begrenzter Stücke des reinen Raumes, darf also die Bewegung als helfendes Princip nicht mitthätig seyn, und zwar um so weniger, weil sie zu ihrer Möglichkeit den Raum als schon gegeben voraussetzet, so wie Objekte, die ihn erfüllen.

4) Es ist folglich die Bewegung ein empirischer Begriff. Aber wie kömmt ein solcher in die Geometrie als apriorische Wissenschaft? Mag auch gleichwohl Herr Kant in der Kritik der reinen Vernunft Bewegung von Be-

schreibung eines Raumes unterschieden wissen: Der angebliche Unterschied scheint mir blos in Worten, nicht in der Sache, zu liegen. Denn es geht bey einer solchen Beschreibung allerdings eine Veränderung der Verhältnisse im Raume vor; die Fläche ändert succesiv ihre Lage gegen die verschiedenen zurückgelassen seyn sollenden Reihen von Spuren.

5) Mit welchem Rechte endlich wird die Vorstellung der Zeit, die jener der Bewegung anhängt, in die ganz ungleichartige des Raumes oder eines Stückes desselben, wie der geometrische Körper ist, eingemenget? Nach meiner Meinung kann eine Kugel nur dadurch entstehen, wenn ein Theil des Raumes nach drey Ausmessungen durch eine einzige krumme Fläche so begrenzt wird, daß alle Punkte dieser Fläche von einem inneren um gleiche Abstände entfernt sind.

§. 5.

Umschriebener Cylinder.

Ein der Halbkugel umschriebener Cylinder ist derjenige, der zur Grundfläche den größten Durchschnitt der Kugel, und zur

Höhe ihren Halbmesser hat. Gleichet aber die Höhe eines Cylinders dem Durchmesser der Kugel, so ist die ganze Kugel in diesen Cylinder eingeschrieben.

§. 6.

Bestimmung der Solidität einer Kugel.

Die Solidität einer Kugel bestimmen die Mathematiker auf verschiedene Art. Berühmt ist folgender Archimedeischer Lehrsatz:

Die Solidität einer Kugel ist zween Drittheilen der Solidität eines derselben umschriebenen Cylinders gleich.

Beweis.

Stelle man sich eine Quadratfläche vor, in welcher durch das eine Paar entgegengesetzter Winkel eine Diagonallinie, durch die Spitzen des anderen ein Kreisbogen mit dem Radius der Seite des Quadrates gezogen ist, so entstehet ein geradwinklichtes Dreyeck nebst einem Quadranten. Denke man sich nun, diese Quadratfläche drehe sich um eine ihrer Seiten, so

wird durch die Umdrehung des Viereckes um die Seite ein Cylinder, durch die Umdrehung des rechtwinklichten Dreyecks aber ein Kegel, durch die Umdrehung des Quadranten eine Halbkugel entstehen, so zwar, daß der Kegel und die Halbkugel im Cylinder eingeschrieben sind. Man durchschneide nun den Cylinder parallel zur Grundfläche, so hat man ebenfalls den Kegel und die Halbkugel in paralleler Richtung durchschnitten. Ziehet man vom Durchschnitte des Cylinders den Durchschnitt des Kegels ab, so ist die Differenz gleich dem korrespondirenden Durchschnitte der Halbkugel. (Dies ist nach der Lehre vom Dreyecke und Kreise leicht erweislich.) Was aber von einem Durchschnitte gilt, gilt eben so von jedem andern, oder von allen zusammen. Nun ist der körperliche Rauminhalt des Cylinders, des Kegels und der Halbkugel nichts, als die Aggregation ihrer Durchschnitte; es druckt folglich die Differenz der Solidität des Kegels von jener des umschriebenen Cylinders die Solidität der eingeschriebenen Halbkugel aus. Da nun der Kegel bey gleicher Höhe und Grundfläche mit dem Cylinder der dritte Theil von diesem ist, so bleiben die zween übrigen Drittheile

für die Solidität der eingeschriebenen Halbkugel, a) b) c)

§. 7.

Gegenerinnerung.

Aber dieser ganze Beweis beruht auf der falschen Ansicht der Genesis einer Kugel, und fällt daher mit dieser zusammen. Die Gegengründe sind §. 4. aufgezählet. Dieser Reihe mag sich noch folgender anschließen. Auch ein unendlicher Inbegriff der Durchschnitte des Raumes ist eine Flächen-Aggregation, und, als solche, weder körperlicher Inhalt, noch, als diskrete Größe, reines Bild des Raumes als stätigen Quantum.

Noch auf eine andere Art bestimmen die Meßkünstler den Rauminhalt der Kugel.

§. 8.

I. Lehrsatz.

Die Kugel ist gleich einer Pyramide, die zur Grundfläche die Oberfläche der

---

a) Dalhami Floriani institut. phys. Tom. I. Viennae Austriae 1753. pag. 260.

b) Jacobs Jo. element. geom. et trig. pag. 79. §. 394 Bambergae 1778.

c) Wolfii Christ. element. mathes. univers. Hala Magdeburgicae 1717. pag. 199. §. 490.

Kugel, zur Höhe aber ihren Halbmesser hat.

Beweis.

Man kann sich die Kugel als zusammengesetzt aus unendlich vielen und kleinen Pyramiden vorstellen, die sich mit ihren Grundflächen in der Oberfläche, und mit den Spitzen im Mittelpunkte der Kugel endigen, das heißt, deren gemeinschäftliche Basis mit der Oberfläche, und deren Höhe mit dem Halbmesser der Kugel, als Größen betrachtet, einerley sind. Denn Pyramiden, auch noch so klein gedacht, verlieren doch ihren Charackter, als geometrischer Körper, nicht; sie können daher als Theile eines größeren Körpers betrachtet werden, folglich in ihrer Verbindung gar wohl einen größeren Körper, eine Kugel, bilden. Nicht weniger können die Grundflächen dieser Pyramiden als unendlich klein gedacht werden, und, wenn sie auch einzeln lauter gerade Flächen sind, doch in ihrer Vereinigung in eine einzige krumme zusammenfließen, indem eine solche ohnehin nichts, als eine Verbindung von geraden Flächen ist, die unter unendlich kleinen Winkeln zusammenstoßen. Solche Pyramiden können auch als Sektoren der Kugel angesehen werden. (§. 2.)

Nun ist doch wohl die Summe der Sektoren einer Kugel die Kugel selbst; diese also der Summe jener unendlich kleinen Pyramiden von einer und derselben Höhe gleich. Aber allen diesen Pyramiden, folglich der Kugel, gleichet eine einzige, die in ihrer Grundfläche die Summe der Grundflächen aller jener, das ist, die Oberfläche der Kugel enthält, und zur gleichen Höhe mit diesen, das heißt, mit dem Radius der Kugel aufsteiget. d) e)

Anmerkung. Diese Vorstellungsart setzet die Kugel nicht, wie die vorhin getadelte, aus Flächen, sondern aus Körpern (kleinen Pyramiden) zusammen, die sich nicht etwa blos zu einem unterbrochenen, sondern zu einem stätigen Quantum (zu einer größeren Pyramide) zusammenfügen.

§. 9.

II. Lehrsatz.

Die Solidität einer Kugel ist dem Produkte aus der Oberfläche in den sechsten Theil des Durchmessers gleich.

---

d) Jacobs Jo. element. geom. et trig. pag. 102. §. 298. Bambergae et Wirceburgi 1798.

e) Wolfii Christ. elem. mathes. univ. p. 199. §. 489.

Beweis.

Die Kugel ist von gleichem Rauminhalte mit der Pyramide, die zur Basis die Oberfläche, und zur Höhe den Halbmesser der Kugel hat. Nun ist die Solidität einer Pyramide das Produkt aus der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe, folglich auch die Solidität der Kugel das Produkt aus der Oberfläche in den dritten Theil des Halbmessers oder den sechsten des Durchmessers. f)

§. 10.

III. Lehrsatz.

Die Oberfläche einer Kugel gleicht einem Recktangul, dessen Seiten die Peripherie und der Diameter des größten Kreises der Kugel sind.

Beweis.

Man denke sich eine Halbkugel durch Ebnen, die zur Grundfläche parallel geführt werden, getheilet; so erhält man Theile, die lauter abgehauene Kegel bilden. Denn sie haben

---

f) Horvath Jo. Bapt. institut. math. Augustae Vindelicorum 1776. p. 185. §. 375.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] des größten [illegible]
[illegible] Kugel seyn.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

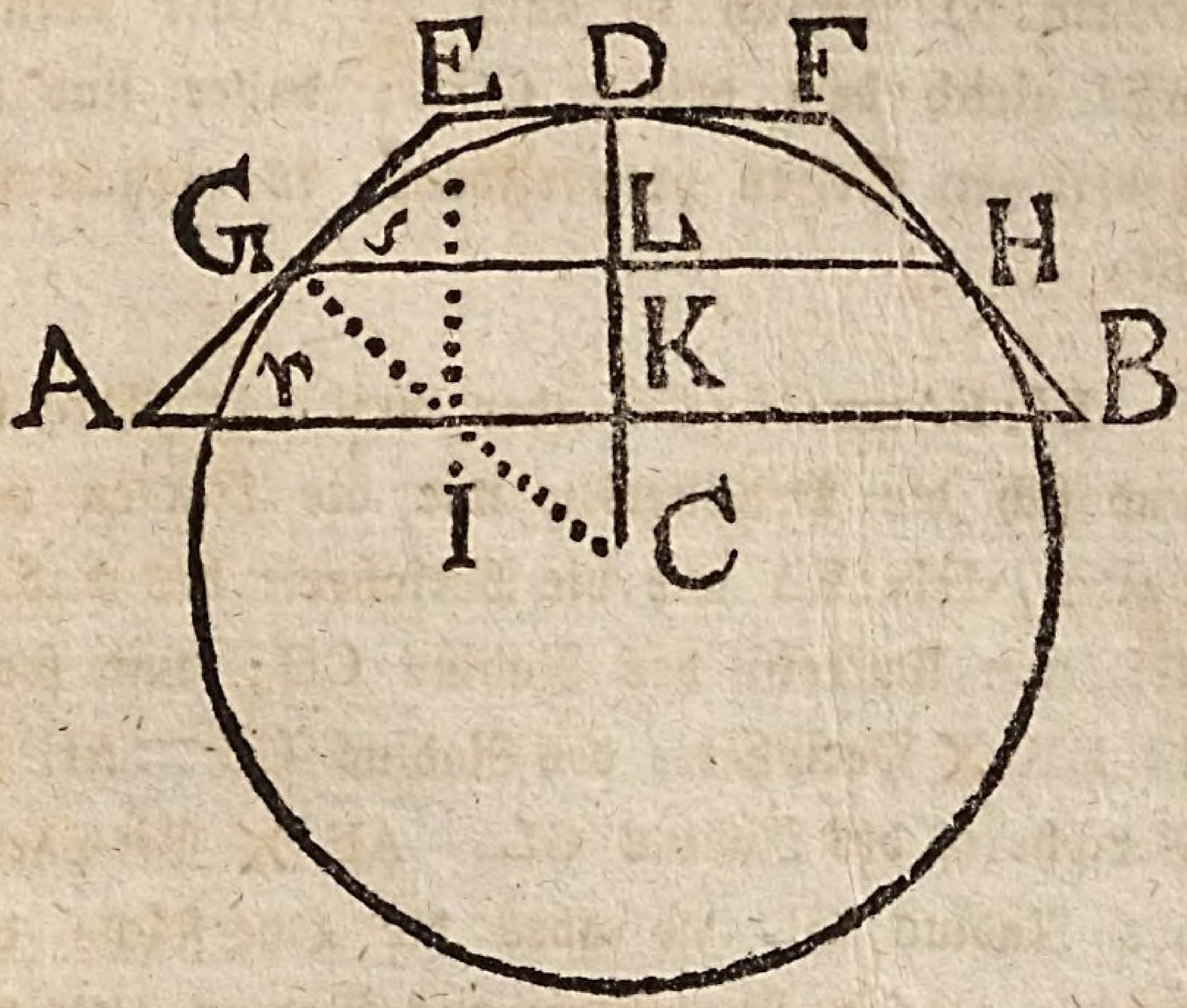
1) alle eine Kreisfläche zur Basis, indem jeder Durchschnitt einer Kugel ein Kreis ist. 2) Nehmen ihre Elemente von der Grundfläche an gegen die Spitze in arithmetischer Progression ab; denn die Peripherien der Kreis-Durchschnitte von demjenigen an gerechnet, dessen Mittelpunkt der äußerste Punkt des auf dem Diameter des größten Kreises senkrecht aufstehenden Radius ist, bis zur Peripherie des größten Kreises selbst nehmen in arithmetischer Progression zu, so zwar, daß ihr letztes Glied die Peripherie des größten kreisförmigen Durchschnittes ist. Nun begrenzen diese Umkreise die Grundflächen der konischen Elemente; diese werden also rückwärts in dem nämlichen Verhältnisse abnehmen müssen. Die Oberfläche der Halbkugel gleicht daher der Summe der Oberflächen aller dieser abgehauenen Kegeln, nach Abzuge der parallelen Grundflächen; die Oberflächen dieser Kegeln sind aber in ihrer Summe gleich dem Recktangul, dessen Seiten die Peripherie und der Radius des größten Kreises der Kugel sind: folglich wird die Oberfläche der ganzen Kugel einem Recktangul gleichen, dessen Seiten die Peripherie und der Diameter des größten Kreises der Kugel sind.

Es bleibt also nur noch zu beweisen übrig, daß die Oberflächen dieser abgehauenen Kegeln einem Recktangul aus der Peripherie des größten Kreises und dessen Radius gleichen, welches sich auf folgende Art darthun läßt.

Ein jeder abgehauene Kegel hat zur Axe einen Theil des Halbmessers der Kugel. Die Oberfläche desselben aber gleicht der zwischen den Umkreisen d . parallelen Grundflächen mittleren arithmetisch-proportionellen Peripherie, multiplizirt mit der Seite des Kegels. g) Wird nun erwiesen, daß dieses Recktangul einem andern gleiche, dessen Seiten die Peripherie des größten Kreises der Kugel und die Axe des Kegels ist, so folget von selbst, daß die Oberflächen aller abgehauenen Kegeln, woraus jene der Halbkugel besteht, dem Produkte aus der Peripherie des größten Kreises in die Summe der Axen, das ist, in den Halbmesser der Kugel gleichen.

---

g) Jacobs elem. geom. pag. 96. §. 290. lit. d)



Es stelle ABFE einen solchen abgehauenen Kegel im Durchschnitte dar; GL den Radius der Peripherie, welche die mittlere arithmetisch proportionelle Größe zwischen den Umkreisen der parallelen Grundflächen des Kegels ist. Man führe den Radius GC, und auf AB eine senkrechte Linie vom Punkte E aus. Auf die Art entstehen zwey ähnliche Dreyecke EAJ und CGL; denn sie sind gleichwinklicht. Die Winkel bey J und L sind gerade; der Winkel r=s, weil AB parallel zu GH ist; der Winkel s gleichet

dem Winkel GCD, denn sie messen gleiche Bögen; h) folglich ist auch der dritte Winkel AEJ gleich dem dritten CGL; daher sind die homologen Seiten proportionell, es verhält sich also

EJ : EA = GL : CG oder weil EJ = DK ist, und sich die Peripherien wie die Radien verhalten, DK : EA wie die Peripherie des Radius GL zum Umkreise des Radius CG; und somit ist DK × Peripherie des Radius CG = AE × Peripherie des Radius GL. AE × Peripherie des Radius GL ist aber die Oberfläche des Kegels DK × Peripherie des Radius CG das Produkt aus der Peripherie des größten Kreises der Kugel in die Axe des Kegels, also etc.

§. 11.

I. Folgesatz.

Wenn man die Oberfläche einer Kugel durch klein s, die Peripherie ihres größten Kreises durch p, den Diameter desselben durch d bezeichnet, so wird für die Oberfläche einer Kugel die allgemeine Formel gelten: $s = pd$.

§. 12.

h) Jacobs elem. geom. §. 135.

§. 12.

II. Folgesatz.

Wenn man die Solidität einer Kugel durch groß S bezeichnet, so wird für jene folgende Formel gelten $S = \frac{pdd}{6}$.

§ 13.

III. Folgesatz.

Der Rauminhalt eines Kugel-Ausschnittes gleichet der Solidität einer Pyramide, die zur Höhe den Halbmesser der Kugel, zur Basis aber die Grundfläche des Ausschnittes (einen Theil der Kugel-Oberfläche) hat.

§. 14.

IV. Folgesatz.

Die Solidität einer sphärischen Zone gleichet der Solidität eines abgehauenen Kegels, dessen parallele Grundflächen die beyden Durchschnitte der Zone sind, dessen Höhe aber derjenige Theil des Durchmessers der Kugel ist, welcher durch die Zone gezogen gedacht werden muß.

§. 15.

V. Folgesatz.

Die Solidität des kleineren Abschnittes einer Kugel gleichet der Differenz der Solidität derjenigen sphärischen Zone, deren Durchschnitte der größte Kreis der Kugel und die Grundfläche des Abschnittes sind, von der Solidität einer Halbkugel. — Die Solidität des größeren Abschnittes aber gleichet der Solidität der Halbkugel und der ebenbeschriebenen Zone zusammengenommen.

§. 16.

VI. Folgesatz.

Die Oberfläche einer sphärischen Zone oder eines Kugel-Abschnittes gleichet der Peripherie des größten Kreises multiplizirt mit ihrer Höhe, oder mit demjenigen Theile des Durchmessers der Kugel, der mit ihrer Axe zusammenfällt.

§. 17.

Wir gehen nun von den Bestimmungen der Kugel zur Untersuchung ihrer Größen-Verhältnisse mit andern geometrischen Körpern fort, und stellen ihre Größen-Beziehung

a) zum umschriebenen Cylinder,
b) zum Parallelepipedon,
c) zum Würfel ihres Durchmessers dar.

§. 18.

IV. Lehrsatz.

Die Kugel verhält sich zum umschriebenen Cylinder α) sowohl in Hinsicht der Solidität, als β) der Oberfläche wie 2:3.

Beweis.

α) Die Solidität des umschriebenen Cylinders gleichet dem Produkte aus der Grundfläche (dem Rauminhalte des größten Kreises der Kugel $= \frac{pd}{4}$) in die Höhe (den Durchmesser der Kugel $= d$ §. 5.) $= \frac{pdd}{4}$ i); die Solidität der Kugel ist $= \frac{pdd}{6}$ (§. 12): Nun verhält sich $\frac{pdd}{6} : \frac{pdd}{4} = 4:6 = 2:3$; denn Brüche von gleichen Zählern verhalten sich umgekehrt wie ihre Nenner, also etc.

---

i) Jacobs elem. geom. §. 271.

β) Die Seitenfläche des Cylinders gleichet dem Produkte aus der Peripherie der Grundfläche in die Höhe k). Es ist also die Seitenfläche des umschriebenen Cylinders $= pd$; setzet man dazu noch die beyden Grundflächen, so drücket $pd + \frac{2pd}{4} = pd + \frac{pd}{2} = \frac{2pd}{2} + \frac{pd}{2} = \frac{3pd}{2}$ die Größe der ganzen Cylinderfläche aus. Die Oberfläche einer Kugel aber ist $= pd$ (§. 11). Nun verhält sich $pd : \frac{3pd}{2} = 2 : 3$; denn $pd \times 3 = 3pd$, und $\frac{3pd}{2} \times 2 = 3pd$, also etc.

§. 19.

Anmerkung.

Man sieht, daß wir nur den von den Mathematikern (§. 6.) geführten Beweis in Hinsicht des Verhältnisses der Kugel zum Cylinder verworfen wissen wollen, nicht aber diesen Lehrsatz selbst.

§. 20.

V. Lehrsatz.

Ein Parallelepipedon, das zur Höhe den Durchmesser einer Kugel, zur Basis aber

---

k) Jacobs elem. geom. §. 275. β)

eine Quadratfläche hat, deren Wurzel die mittlere geometrisch proportionelle Linie zwischen der Peripherie des größten Kreises und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel ist, hat mit dieser gleiche Solidität.

Beweis.

Die Solidität eines solchen Parallelepipedons gleicht dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe. Nun aber ist die mittlere Größe zwischen der Peripherie des größten Kreises und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel $= \sqrt{\frac{pd}{6}}$; denn es muß sich nothwendig verhalten (wenn man die mittlere Größe X nennet) $p : X : \frac{d}{6}$. Es ist also $X^2 = \frac{pd}{6}$, und daher $X = \sqrt{\frac{pd}{6}}$. Es wird also $\frac{pd}{6}$ der Grundfläche des genannten Parallelepipedons gleichen, und somit die Solidität dieses Körpers $= \frac{pd}{6} \times d = \frac{pdd}{6}$ seyn. Aber die nämliche Solidität hat auch die Kugel (§. 12.); also etc.

§. 21.

VI. Lehrsatz.

Der Würfel des Durchmessers einer Kugel verhält sich zur Solidität dieser, wie das Sechsfache des Diameters des größten Kreises zu seiner Peripherie.

Beweis.

Da $S = \frac{pdd}{6}$ ist, so wird auch $S \times d = \frac{pdd}{6} \times d = \frac{pd^3}{6} = \frac{p}{6} \times d^3$ seyn. Nun haben gleiche Produkte umgekehrte Faktoren. Es ist also $d^3 : S = d : \frac{p}{6} = 6d : p$.

Praktischer Theil.

§. 22.

I. Aufgabe.

Das Verhältniß des Würfels des Kugel-Durchmessers zur Solidität der Kugel zu finden.

b) Adrian Metius nahm an: p:d = 355:113

Auflösung.

Das Verhältniß der Kugel zum Würfel ihres Durchmessers ist nach den verschiedenen Methoden, die Kreisfläche zu berechnen, verschiedentlich bestimmbar. Diese Methoden beruhen auf den mancherley von den Mathematikern angenommenen Verhältnissen des Umkreises zum Durchmesser des Zirkels.

a) Nach Archimed übertrifft die Peripherie des Kreises den Diameter um das Dreyfache nebst einem Theile, der kleiner als $\frac{10}{70}$, oder der siebente Theil, aber größer, als $\frac{10}{71}$ desselben ist. Er setzte daher folgendes Verhältniß $p:d = 22:7$ fest. Dalham unterstützet diese Angabe durch Kalkul und Demonstration.

b) Adrian Metius nahm an: $p:d: = 155:113$.

c) Christian Wolff zeigte die Methode, wie man das Verhältniß der Peripherie zum Diameter durch Kalküls finden könne, und bestimmte dasselbe in folgender Proportion:

$$p:d = 31415926535897932 : 10000000000000000$$

d) Ludolph berechnete, daß, wenn man den Diameter = 1 annimmt, die Peripherie kleiner als

3,14159265358979323846264338387950,

aber größer als diese Zahl sey, wenn man die letzte Ziffer in eine Einheit verwandelt l).

Das Wolffische Verhältniß unterscheidet sich demnach von dem Ludolphischen blos darin, daß jenes in ganzen Zahlen, dieses in Decimalen ausgedruckt und weiter fortgesetzt ist, wodurch es an Genauigkeit mehr gewonnen hat. Weil aber die Weglassung von Decimalzahlen, die über 10000 hinauslaufen, keinen merklichen Irrthum in der Rechnung veranlasset, so setzet man bey dem Gebrauche des Ludolphischen Verhältnisses blos diese Proportion an: p : d = 3,1416 : 1. m)

Dagegen aber sind die übrigen angeführten Verhältnisse des Archimedes und Metius desto unbestimmter und unrichtiger. Dies wird

---

l) Wolfii Christ. elem. math. univ. pag. 177. §§. 402. 403.

m) Jacobs Jo. elem. arithmeticae et algeb. Bambergae et Wirceburgi 1798. §. 251.

einleuchtender werden, wenn man die verschiedenen darnach berechneten Verhältnisse des Würfels des Durchmessers nach der oben (§. 21.) angegebenen Formel prüfet. Ich suche nun diese einzelnen Verhältnisse aufzufinden.

α) Nach dem Verhältnisse des Archimedes hat, wenn man die Solidität einer Kugel durch S, den Würfel des Durchmessers durch D^3 ausdrücket, folgende Proportion statt: $D^3 : S = 72000 : 37714 = 72 : 37{,}714$ beynahe.

Beweis.

Es sey der Durchmesser einer Kugel $60 = d$, so wird sich verhalten $d : p = 60 : X$, oder der $7 : 22 = 60 : 188\frac{4}{7}$. Es wird ferner $d^2 = 3600$, $\frac{d^2}{6} = 600$, $p \times \frac{d^2}{6} = 188\frac{4}{7} \times 600 = 113142\frac{6}{7}$, endlich $D^3 = 216000$ seyn. Es wird also folgende Proportion feststehen: $D^3 : S = 216000 : 113142 = 72000 : 37714 = \frac{72000}{1000} : \frac{37714}{1000} = 72 : 37{,}714$ beynahe.

β) Nach Metius findet dieses Verhältniß statt: $D^3 : S = 72 : 16{,}46$ beynahe.

Beweis.

Es sey der Durchmesser $= 60$, so wird, da $d:p = 113:155$ ist, $113:155 = 60:82\frac{34}{113}$ seyn; folglich wird $\frac{pdd}{6} = 82\frac{34}{113} \times 600 = 49380\frac{60}{113}$, also $D^3:S = 216000:49380 = 72000:16460 = 7200:1646 = \frac{7200}{100} : \frac{1646}{100} = 72:16{,}46$ beynahe seyn.

γ) Nach Ludolph ist: $D^3:S = 1:0{,}5236 = 10000:5236$.

Beweis.

Nach Ludolph verhält sich $p:d = 3{,}1416:1$. Es ist also $p = 3{,}1416 \times d$, und da $S = \frac{pdd}{6} = p \times \frac{d^2}{6}$ ist, so wird $S = 3{,}1416d \times \frac{d^2}{6} = \frac{3{,}1416d^3}{6} = \frac{3{,}1416}{6} \times d^3 = 0{,}5236 \times d^3$ seyn. Es steht also die Proportion fest: $D^3:S = 1:0{,}5236 = 10000:5236$.

Nun wollen wir diese Verhältnisse der Reihe nach untersuchen, und sehen, welches derselben dem §. 21. aufgestellten Lehrsatze entspreche oder nicht.

1) Nach Archimed verhält sich $D^3:S = 72:37,714$. Es müßte sich also auch, da $D^3:S = 6d:p$ ist, $72:37,714 = 360:188\frac{4}{7}$ verhalten, und daher $72 \times 188\frac{4}{7} = 37,714 \times 360$ seyn. Nun ist aber $72 \times 188\frac{4}{7} = 13536 + 41 + \frac{1}{7} = 13577\frac{1}{7}$ und $37,714 \times 360 = 13577,04 = 13577\frac{1}{25}$; daher ist dieses Verhältniß nicht völlig richtig, ob es gleich dem wahren sehr nahe kömmt.

2) Nach Metius verhält sich $D^3:S = 72:16,46$; es müßte sich also auch $72:16,46 = 360:82 + \frac{34}{113}$ verhalten, und daher $72 \times 82 + \frac{34}{113} = 16,46 \times 360$ seyn. Nun ist aber $72 \times 82 + \frac{34}{113} = 5904 + 21 + (\frac{75}{113} = \frac{375}{565}), = 5925 + \frac{375}{565}$, und $16,46 \times 360 = 5925,6 = 5925 + (\frac{3}{5} = \frac{339}{565})$. Es mangelt also auch diesem Verhältnisse die erforderliche Genauigkeit.

3) Nach Ludolph verhält sich $D^3:S = 1:0,5236$. Da sich ferner verhält $1:3,1416 = 60:188,496$, so wird auch $1:0,5236 = 360:188,496$ und somit $0,5236 \times 360 = 188,496 \times 1$ seyn müssen. Nun ist aber $0,5236 \times 360 = 188,496$; es behauptet also das Ludolphische Verhältniß vor den übrigen

den Vorzug, indem es allein mit dem obigen Lehrsatze auf das vollkommenste übereinstimmet.

Anmerkung. Da von den neuesten Mathematikern das Ludolphische Verhältniß der Peripherie zum Diameter des Kreises für das richtigste angenommen wird, welch weit größere Abweichung vom obigen Lehrsatze wird man in den beyden ersten Verhältnissen wahrnehmen, wenn man die Peripherie des Kreises nach dem Ludolphischen Verhältnisse bestimmt?

§. 23.

II. Aufgabe.

Die Oberfläche der Kugel zu finden.

Auflösung.

1) Man multiplizire entweder die Peripherie des größten Kreises mit dem Diameter; — oder

2) man multiplizire den Rauminhalt des größten Kreises mit 4; — oder

3) man erhebe die mittlere geometrisch proportionelle Linie zwischen der Peripherie des größten Kreises und seinem Diameter zum Quadrate.

§. 24.

III. Aufgabe.

Die Solidität der Kugel zu finden.

Auflösung.

1) Man multiplizire entweder die Oberfläche in den dritten Theil des Halbmessers; — oder

2) man dividire das Produkt aus dem Würfel des Durchmessers in die Peripherie des größten Kreises durch das Sechsfache des Diameters; — oder

3) man multiplizire den Würfel des Durchmessers mit 0,5236; — oder

4) das Quadrat des Durchmessers mit dem sechsten Theile der Peripherie; — oder

5) den größten Kreis mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers.

§. 25.

IV. Aufgabe.

Die Oberfläche a) einer sphärischen Zone,
b) eines Abschnittes zu finden.

Auflösung.

a) Man multiplizire die Peripherie des größten Kreises mit dem Theile des Durchmessers der Kugel, welcher der Höhe der Zone gleich ist.

b) Man multiplizire dieselbe Peripherie mit der Höhe des Abschnittes.

§. 26.

V. Aufgabe.

Die Solidität a) eines Ausschnittes,
b) einer sphärischen Zone,
c) eines Abschnittes zu finden.

Auflösung.

a) Man multiplizire den dritten Theil der gewölbten Grundfläche des Ausschnittes mit dem Halbmesser der Kugel.

b) Man finde die mittlere geometrisch proportionelle Größe zwischen den beyden Grundflächen der Zone, addire dieselbe zu den beyden Grundflächen, und multiplizire diese Summe mit dem dritten Theile der Höhe der Zone.

c) Man addire oder subtrahire die Solidität der Zone, die das Complement des Abschnittes zur Halbkugel ausmacht, von der Solidität der Hemisphäre, je nachdem der Abschnitt der größere oder kleinere ist.

§. 27.

VI. Aufgabe.

Den Durchmesser einer Kugel, die viermal so groß, als eine gegebene ist, zu finden.

Auflösung.

1) Man suche die Solidität der gegebenen Kugel, multiplizire dieselbe mit 4, und setze das Verhältniß des Würfels des Kugel-Durchmessers zur Solidität in Zahlen an. Nämlich: wie sich 0,5236:1; so verhält sich die vervielfältigte Solidität zum Würfel ihres Durchmessers. Aus dem gefundenen vierten Gliede

der Proportion ziehe man die Kubikwurzel aus, diese wird dem Durchmesser der gesuchten Kugel gleichen. — Oder

2) man ziehe eine unbestimmt lange Linie, trage darauf viermal den Durchmesser der gegebenen Kugel, suche dann zwischen dem einfachen und vierfachen Durchmesser zwo mittlere geometrisch proportionelle Linien, die kleinere davon wird der Durchmesser der viermal größeren Kugel seyn. — Diese Lösung der Aufgabe kann die geometrische, jene die arithmetische heißen.

Beweis.

1) Die arithmetische Methode beruht auf dem (§. 22. lit. γ.) angegebenen Verhältnisse des Würfels des Kugel-Durchmessers zu ihrer Solidität. Aber eben daraus fließet, daß die so erzeugte Kugel mit der gegebenen nicht völlig im verlangten Verhältnisse stehen könne.

2) Nenne man die Diametrallinie d, so wird die viermal so große Linie 4d seyn; es werden also (läßt man folgende progressive Reihe entstehen $d:y:X:4d$) y und X die mittleren beyden Progressionsglieder, und unter ihnen

ihnen γ das kleinere seyn. Es steht also auch folgende Proportion $d:4d = d^3:\gamma^3$, oder $d:4d = d^3:4d^3$, und somit auch $d^3:4d^3 = 1:4$, das heißt: der Würfel des Durchmessers der gegebenen Kugel (d^3) verhält sich zu jenem der zu suchenden ($\gamma^3 = 4d^3$) im Verhältnisse von 1:4. Nun verhalten sich die Kugeln, wie die Würfel ihrer Durchmesser, es wird also auch die gegebene Kugel sich zu der nach dem gefundenen Diameter zu konstruirenden verhalten wie 1:4, das ist, im gegebenen Verhältnisse.

§. 28.

VII. Aufgabe.

Den Durchmesser einer viermal kleinern Kugel, als die gegebene, zu finden.

Auflösung.

1) Arithmetische Methode. Man suche die Solidität der gegebenen Kugel, dividire sie durch 4, und finde dann nach der §. 27. Nro. 1. gegebenen Regel den verlangten Durchmesser der Kugel.

2) Geometrische Methode. Man theile den Durchmesser der gegebenen Kugel in vier gleiche Theile, finde zwey mittlere geometrische Progressionsglieder zwischen dem ganzen Durchmesser und dem vierten Theile desselben, das größere der beyden Glieder wird der gesuchte Diameter seyn.

Beweis.

1) Die Richtigkeit der arithmetischen Methode leuchtet nach dem Obigen von selbst ein.

2) Nach der geometrischen Methode wird sich $d:\gamma:X:\frac{d}{4}$ verhalten. Man sieht, daß γ das größere der beyden Mittelglieder sey, weil die Progression eine absteigende ist; es steht also auch folgende Proportion fest: $d:\frac{d}{4} = d^3:(\gamma^3 = \frac{d^3}{4})$; d^3 ist aber der Würfel des Durchmessers der gegebenen, $\frac{d^3}{4}$ jener der zu suchenden Kugel, es verhält sich also die gegebene Kugel zur gefundenen wie $d:\frac{d}{4}$ oder $1:\frac{1}{4}$.

§. 29.

VIII. Aufgabe.

Eine Kugel in ein Parallelepipedon von gleicher Solidität zu verwandeln.

Auflösung.

Man finde die mittlere geometrisch proportionelle Linie (m) zwischen der Peripherie des größten Kreises (p) und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel $\left(\frac{d}{6}\right)$, konstruire ein Quadrat, dessen Wurzel diese Linie ist, bilde dann ein Parallelepipedon, das dieses Quadrat zur Grundfläche, und zur Höhe den Durchmesser der Kugel hat, so wird dasselbe der Solidität der Kugel gleichen.

Beweis.

Die Grundfläche eines solchen Parallelepipedons ist nichts anders als $\frac{pd}{6}$. Denn es verhält sich $p:m:\frac{d}{6}$, und somit ist $m^2 = \frac{pd}{6}$; das Produkt der Grundfläche $\left(\frac{pd}{6}\right)$ in die Höhe (d) giebt nun die Solidität des Parallelepipedons $= \frac{pdd}{6}$; gleiche Solidität aber hat auch die Kugel, also etc.

§. 30.

IX. Aufgabe.

Eine Kugel in einen Würfel zu verwandeln.

Auflösung.

Man verwandle die Kugel zuerst in ein Parallelepipedon von gleicher Solidität, und dieses dann in einen Würfel. Die Bewerkstelligung des letzteren lehrt die Theorie vom Prisma.

§. 31.

Anmerkung.

Eine andere Methode, die eben erwähnte Aufgabe zu lösen, wird weiter unten gelehrt, wo von der Verwandlung der Kugel in jedes beliebige regelmäßige Polyedron die Rede ist.

§. 32.

X. Aufgabe.

Eine Kugel in einen Cylinder von gleicher Solidität zu verwandeln.

Auflösung.

Man konstruire einen Cylinder, der zur Grundfläche den Rauminhalt des größten Kreises, und zur Höhe zween Drittheile des Kugel-Durchmessers hat.

Beweis.

Die Solidität eines solchen Cylinders gleichet dem $\frac{pd}{4} \times \frac{2d}{3} = \frac{2pdd}{12} = \frac{pdd}{6}$; eine gleiche Solidität hat aber auch die Kugel, also etc.

§. 33.

XI. Aufgabe.

Die Kugel in jedes regelmäßige Polyedron zu verwandeln.

Auflösung.

Es verhält sich der Durchmesser einer Kugel zur Seite eines Würfels = 1260:1000,
zur Seite eines Tetraedrons = 1260:2051,
zur Seite eines Ocktoedrons = 1260:1285,
zur Seite eines Ikosaedrons = 1260: 757,
zur Seite ein. Dodekaedrons = 1260:501.n)

---

n) Vollständiges mathem. Lexikon. Leipz. bey Joh. Fr. Gleditschen 1742. II. Th. II. Abschn. p. 4. Tab. V.

§. 34.

Da alle diese Verhältnisse nicht ganz exakt sind, so können regelmäßige Körper nach solchen Verhältnissen konstruirt nicht völlig dem körperlichen Inhalte gegebener Kugel gleichen.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Jaeck, Michael

Theorie der Sphäre

Bamberg 1803

Bamberg, Staatsbibliothek -- HV.H.Bbg.908
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11693517-9